

対称群から「固定点 1 個以下の対合の集合」× 「self-reverse-complement な置換の集合」への全単射

2026 年 9 月 27 日

このノートの著者: Laguerre-chan

連絡先: X@LaguerreLion

置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して, その reverse σ^r とは $\sigma^r(i) \triangleq \sigma(n+1-i)$ で定義される置換であり, その complement σ^c とは $\sigma^c(i) \triangleq n+1-\sigma(i)$ で定義される置換である. 置換 σ が $\sigma = \sigma^{rc}$ を満たすとき, self-reverse-complement であるという. 置換 σ が $\sigma^2 = \text{id}$ を満たすとき対合であるという. 但し id は恒等置換を表す. 数 $i \in \{1, \dots, n\}$ が $\sigma(i) = i$ を満たすとき, i は σ の固定点であるという. 置換 σ の固定点の数を $\text{fix}(\sigma)$ とかく.

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の部分集合で固定点 1 個以下の対合の集合を $\mathcal{M}_n \triangleq \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^2 = \text{id}, \text{fix}(\sigma) \leq 1\}$ とし, self-reverse-complement な置換の集合を $B_n \triangleq \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^{rc} = \sigma\}$ とかく. 本稿では, 全単射 $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathcal{M}_n \times B_n$ を構成する. 全単射はまず代数的に構成し, 同じ全単射を組合せ論的にも構成する.

1 全単射の代数的構成

群の一般論を使って全単射を構成する. 群 G を考える. 元 $x \in G$ に対して $C(x) \triangleq \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$ を x の共役類という. 元 $x, y \in G$ に対して $T(x, y) \triangleq \{g \in G \mid g^{-1}xg = y\}$ と定める. 特に $T(x, x)$ は x の中心化群と呼ばれ, G の部分群となる.

命題 1. G を有限群とし, $x \in G$ とする. 全単射 $G \rightarrow C(x) \times T(x, x)$ が構成される.

構成. 各 $y \in C(x)$ に対して定義から $T(x, y) \neq \emptyset$ である. 各 $y \in C(x)$ に対して $T(x, y)$ から元を一つ選び, それを α_y とかく. 写像 $G \ni g \mapsto (g^{-1}xg, g\alpha_{g^{-1}xg}^{-1}) \in C(x) \times T(x, x)$ は全単射である. まず well-defined なことを確かめる. $z = g^{-1}xg$ とかく. $(g\alpha_z^{-1})^{-1}x(g\alpha_z^{-1}) = \alpha_z g^{-1}xg\alpha_z^{-1} = \alpha_z z\alpha_z^{-1} = x$ なので $g\alpha_z^{-1} \in T(x, x)$. よってこの写像は well-defined である. 写像 $C(x) \times T(x, x) \ni (y, h) \mapsto h\alpha_y \in G$ が逆写像となるから, 全単射である. $\square$

メモ. 命題 1 の全単射の構成では各 $y \in C(x)$ に対して $\alpha_y \in T(x, y)$ を選ぶ部分に恣意性があるため, 命題 1 で構成した全単射は一意的に定まるわけではない.

系 2. 全単射 $\Phi: \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathcal{M}_n \times B_n$ が構成される.

構成. 命題 1 における群 G を対称群 $\mathfrak{S}_n$ とし, 元 $x \in G$ を $x = \text{id}^r \in \mathfrak{S}_n$ とする. 以降 $w_0 \triangleq \text{id}^r$ とかく. $y \in C(w_0)$ に対して $\alpha_y \triangleq \min T(w_0, y)$ と選ぶことにする. 但し $\min$ は, 置換をワード表記したときの辞書式順序での最小を意味する. すると, 命題 1 より, $\Phi: \mathcal{S}_n \ni \sigma \mapsto (\sigma^{-1}w_0\sigma, \sigma\alpha_{\sigma^{-1}w_0\sigma}^{-1}) \in C(w_0) \times T(w_0, w_0)$ は全単射である. 集合 $C(w_0)$ は, 置換 w_0 とサイクルタイプが同じであるような置換の集合なので, $C(w_0) = \mathcal{M}_n$ である. 集合 $T(w_0, w_0)$ は関係式 $\sigma w_0 = w_0 \sigma$ を満たす置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の集合であり, $w_0 \sigma(i) = n+1 - \sigma(i)$, $\sigma \lambda(i) = \sigma(n+1 - i)$ より $\sigma(i) = n+1 - \sigma(n+1 - i) = \sigma^{rc}(i)$. よって $T(w_0, w_0) = B_n$. $\square$

2 全単射の組合せ論的構成

系 2 で構成した全単射 $\Phi: \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathcal{M}_n \times B_n$ は組合せ論的に構成することもできる. 集合 $\mathcal{M}_n$ は n が偶数のとき文字 $1, \dots, n$ を二つずつ組にしたマッチング, n が奇数のときは一文字だけ組にできない仲間はずれが残る部分的なマッチングと見なすことができる. 集合 B_n の要素は $b_1 \cdots b_n$ とワード表記したとき, 前半の $\lfloor n/2 \rfloor$ 個を定めれば一意的に定まる. 以下で全単射 $\Phi': \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathcal{M}_n \times B_n$ を構成する. 以下では $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して $\bar{i} \triangleq n+1 - i$ と定める.

構成 (系 2 の別証). 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ のワード表記を $w_1 \cdots w_n$ とする. このワード表記において, 各 $i \in \{1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ に対して文字 i と $\bar{i}$ の間に弧を描く. こうして描かれる $\lfloor n/2 \rfloor$ 本の弧の組は $\mathcal{M}_n$ の元とみなすことができる. これらの弧が結ぶ二つの文字 $i, \bar{i}$ のうち, σ のワード表記において左側にあるものを「オープナー」と呼ぶ. σ のワード表記を左から右に読みオープナー $\lfloor n/2 \rfloor$ 個を順に集めれば, B_n の元を得る. この対応 $\Phi': \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathcal{M}_n \times B_n$ は全単射である. $\square$

命題 3. 代数的に定義した写像 Φ と, 組合せ論的に定義した写像 Φ' は同じ写像である.

証明. 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\Phi(\sigma) = (m, b), \Phi'(\sigma) = (m', b')$ とする. まず $m = m'$ を示す. $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して $m'(i)$ は σ のワード表記を $w_1 \cdots w_n$ とすると $w_j = \overline{w_i}$ となる j であり, それは $\sigma^{-1}(\overline{\sigma(i)}) = \sigma^{-1}w_0\sigma(i) = m(i)$ である. 次に $b = b'$ を示す. 以下,

この証明の中でのみ $\alpha_{\sigma^{-1}w_0\sigma}$ を α と略記し, $k = \lfloor n/2 \rfloor$ とする. 置換 σ のオープナーを左から順に $o_1, \dots, o_k$ とする. 示すべきことは $\sigma\alpha^{-1}(i) = o_i$ ($i \in \{1, \dots, k\}$) である. 置換 σ のオープナーの位置を左から順に $p_1, \dots, p_k$ とする. すなわち $\sigma(p_i) = o_i$ ($i \in \{1, \dots, k\}$) とする. 集合 $T(w_0, \sigma^{-1}w_0\sigma)$ は σ とマッチング構造が同じ置換全体の集合である. すなわち置換 τ が $\tau \in T(w_0, \sigma^{-1}w_0\sigma)$ を満たすならば, かつそのときに限り任意の $i, j \in \{1, \dots, n\}$ に対して $\overline{\tau(i)} = \tau(j) \iff \overline{\sigma(i)} = \sigma(j)$ が成り立つ. このことは, $\tau \in T(w_0, \sigma^{-1}w_0\sigma)$ かつ $\overline{\sigma(i)} = \sigma(j)$ ならば, $\overline{\tau(i)} = \overline{w_0\tau\sigma^{-1}w_0\sigma(i)} = \tau\sigma^{-1}w_0\sigma(i) = \tau\sigma^{-1}(\overline{\sigma(i)}) = \tau\sigma^{-1}\sigma(j) = \tau(j)$ が成り立つことから分かる. よって α の最小性から $\alpha(p_i) = i$ である. よって $p_i = \alpha^{-1}(i)$ であり, $\sigma(p_i) = o_i = \sigma\alpha^{-1}(i)$ である. $\square$

3 補足

集合 $\mathcal{M}_n$ の濃度は $|\mathcal{M}_n| = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}, i: \text{odd}} i$ であり, 集合 B_n の濃度は $|B_n| = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}, i: \text{even}} i$ なので, これらを合わせて対称群の濃度は $|\mathfrak{S}_n| = |\mathcal{M}_n||B_n| = n!$ であることがわかる.

本稿で定義した集合 B_n は通常の対称群の積によって群をなし, それは $B_{\lfloor n/2 \rfloor}$ 型 Weyl 群 (超八面体群) と同型である.